Problema:
Dado un paralelogramo se desean obtener las elipses inscritas en él en función del punto de tangencia con uno de sus lados.

Carlos Fleitas Cochoy, octubre de 2013.

Toda elipse se puede transformar en una circunferencia mediante una proyección ortogonal adecuada.
El paralelogramo circunscrito a la elipse se transforma así en un rombo debido a que la proyección ortogonal transforma rectas en rectas y parejas de rectas paralelas en parejas de rectas paralelas y el centro del rombo se obtiene proyectando el centro de la elipse original (ya que es el punto de intersección de las diagonales).

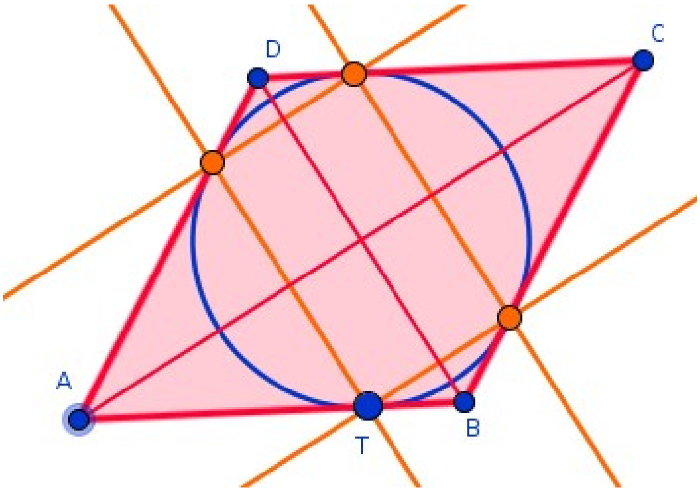


Ilustración 1: Circunferencia obtenida mediante proyección ortogonal de una elipse y su rombo circunscrito

Conocido uno de los puntos de tangencia de la circunferencia con el rombo, por ejemplo T, los otros tres están determinados unívocamente, por razones de simetría, mediante paralelismo respecto de las dos diagonales del rombo.

Como las razones de las longitudes de los segmentos determinados por tres puntos alineados son invariantes mediante proyecciones ortogonales, se deduce que, conocido un punto contacto de la elipse original con el paralelogramo original, los otros tres puntos de tangencia quedan determinados trazando las paralelas a las diagonales del paralelogramo y obteniendo los puntos de intersección correspondientes.

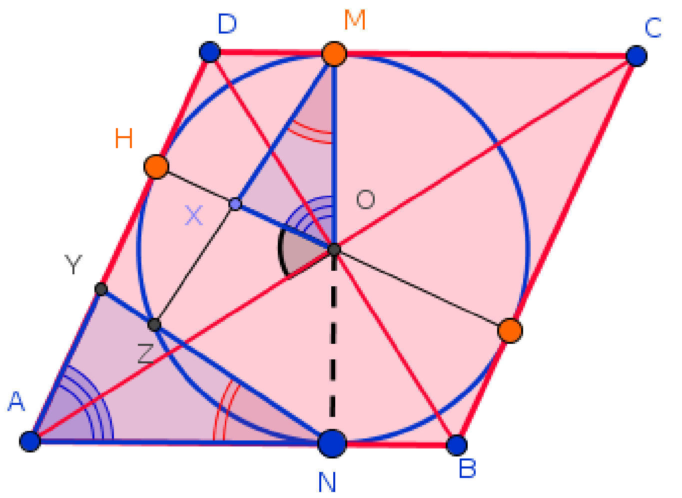
Por ello en la configuración incial (paralelogramo y elipse inscrita) conocido uno de los puntos de tangencia, los otros tres quedan determinados de forma unívoca. Para poder dibujar la elipse inscrita en el paralelogramo original es preciso disponer de un quinto punto (para usar la herramienta “dibujar cónica” disponible en cualquier programa geométrico)

Veamos cómo se puede obtener ese quinto punto para dibujar la elise con la clásica herramienta que requiere cinco puntos, o bien usando la herramienta lugar geométrico posibilidad que ofrecen la mayoría de los programas de geometría dinámica:

Las explicaciones siguientes están basadas en:
http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/43.pdf que es una versión actualizada del artículo 43 del famoso libro *100 Great Problems of Elementary Mathematics (Dover Books on Mathematics)* de Heinrich Dorrie. No tengo claro quién es el autor del artículo.

La siguiente imagen permite demostrar una importante propiedad.
Se considera un punto X situado sobre el radio OH y la recta determinada por el punto M y el punto X. Esta recta determina el punto Z sobre la circunferencia. La recta NZ, a su vez, determina el punto Y sobre el lado DA.
En la siguiente imagen se justifica la semejanza entre los triángulos YAN y OMX.

1. $\angle ANY = (\text{ang. semiinscrito}) = \dfrac{\widehat{NZ}}{2} = \angle ZMO = \angle XMO$
2. $\angle YAN = \pi - \angle HON = \angle HOM$
3. $\triangle YAN \approx \triangle OMX$



De la semejanza de los triángulos : $\dfrac{OX}{OM} = \dfrac{AY}{AN}$

Como OH = OM y AN = AH : $\dfrac{OX}{OH} = \dfrac{AY}{AH}$

Ilustración 2: Propiedad de los puntos de la circunferencia inscrita

De dicha semejanza se deduce un importante resultado: las razones determinadas por X en el segmento OH y por Y en el segmento AH (OX/OH AY/AH) son iguales.

Como en las transformaciones ortogonales las líneas rectas se transforman en líneas rectas y la razón de tres puntos alineados se conserva, este resultado también se debe cumplir para la configuración original de la elipse inscrita en un paralelogramo.
Es decir en la elipse los puntos se cumple que las correspondientes razones coinciden y eso permite encontrar un punto Z sobre la elipse y permite dibujarla con algún programa informático.
Además, dado un punto de tangencia sobre uno de sus lados, por ejemplo N, los demás puntos de

tangencia se obtienen trazando las rectas paralelas a las diagonales, tal y como se ha comentado al principio del artículo.
A partir del punto N, se obtienen los restantes puntos de tangencia y el punto Z se obtiene utilizando la propiedad que acabamos de comentar.
La imagen lo muestra:

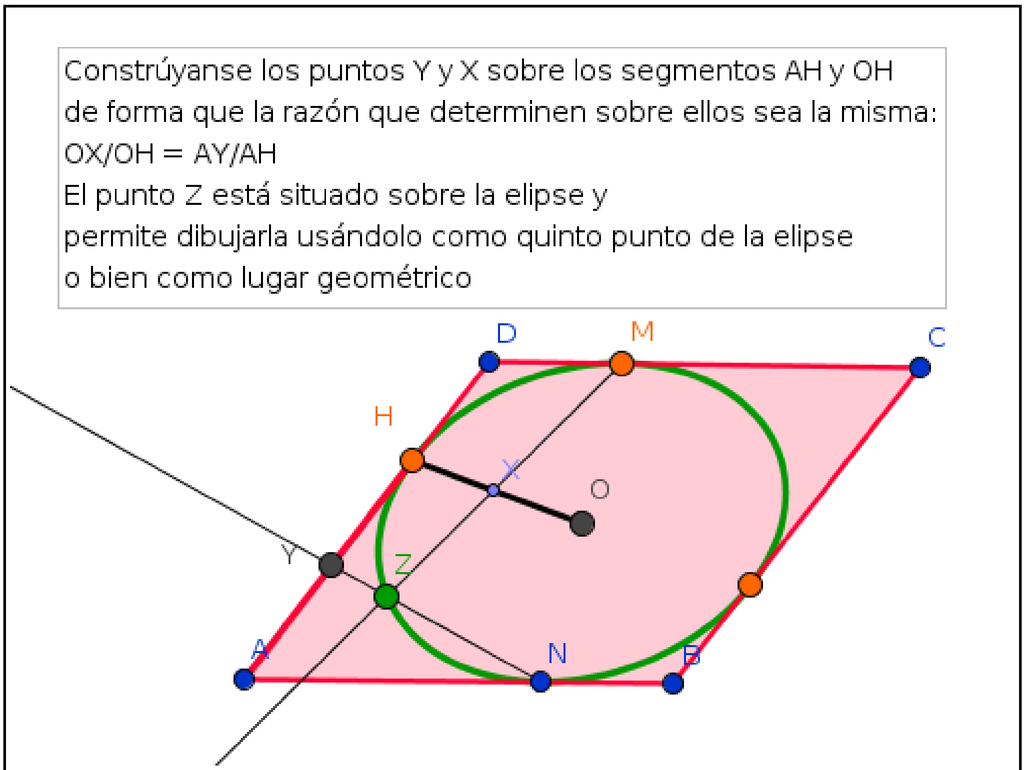


Ilustración 3: Obtención del quinto punto sobre la elipse (Z)

La siguiente imagen muestra cómo se genera la elipse de forma real usando [Geogebra](). En la construcción práctica hemos utilizado los puntos medios de los segmentos AH y OH (como puntos Y y X).

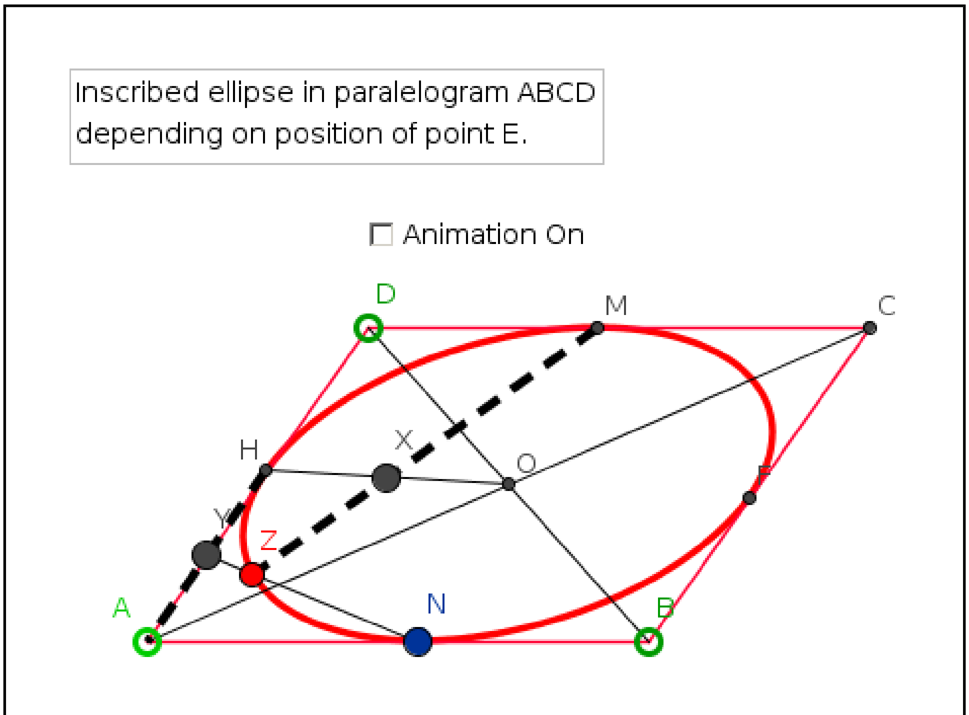


Ilustración 4: Obtención del punto Z para dibujar la elipse